

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ 2015

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολ. Βιβλίο σελ 31
A2. Σχολ. Βιβλίο σελ 27
A3. Σχολ. Βιβλίο σελ 86
A4. Λ-Σ-Λ-Λ-Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow x=1/3, x=1/2, x=1/4$

Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ έτσι $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

Άρα $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

B2.

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') = \\ &= 1 - P(A) - P((A \cup B)') = \\ &= 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$P(\Delta) = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

B3.

Είναι $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$ και $E = (A-B) \cup (B-A)$

Άρα

$$\begin{aligned} P(E) &= P((A-B) \cup (B-A)) = \\ &= P(A-B) + P(B-A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

B4. $9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -6/18(\alpha\text{πορ}), x = 2/3(\delta\epsilon\alpha\kappa\tau\acute{\eta})$

$$\text{Άρα } P(\Gamma) = \frac{2}{3}$$

Έστω είναι ασυμβίβαστα. Τότε $B \cap \Gamma = \emptyset$.

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{3}{4} = \frac{14}{12} > 1 \text{ (άτοπο)}$$

Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f_1\% = 10\%$ από ορισμό σχετικής συχνότητας

$f_5\% = 30\%$ από ορισμό σχετικής συχνότητας

$$a_3 = f_3 \cdot 360 \Rightarrow f_3 = \frac{108}{360} \Rightarrow f_3 = 0,3$$

$$f_2\% + f_4\% = 100\% - f_1\% - f_3\% - f_5\% \Rightarrow$$

$$f_2\% + f_4\% = 30\% \Rightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (1)$$

Τα κέντρα των κλάσεων είναι : $x_1 = 9, x_2 = 11, x_3 = 13, x_4 = 15, x_5 = 17$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i \Leftrightarrow 14 = 0,1 \cdot 9 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχω $f_2 = 0,1$ και $f_4 = 0,2$

Άρα $f_2\% = 10$ και $f_4\% = 20$.

Γ2.

$$s^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot f_3 + (x_4 - \bar{x})^2 \cdot f_4 + (x_5 - \bar{x})^2 \cdot f_5 =$$

$$(9-14)^2 \cdot 0,1 + (11-14)^2 \cdot 0,1 + (13-14)^2 \cdot 0,3 + (15-14)^2 \cdot 0,2 + (17-14)^2 \cdot 0,3 = 6,6$$

$$\text{Άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,6} \approx 2,57$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} \approx 0,184 > 0,1$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i + x_5 \cdot v_5}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + 17v_5}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 17 \frac{v_5}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 17f_5 \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{v} + 17 \cdot 0.3 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 5.1 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4. Είναι

$$\beta_i = \frac{1}{s_a} a_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$$

Από εφαρμογή του βιβλίου σελ 99 έχουμε

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0 \quad s_{\beta} = \left| \frac{1}{s_a} \right| \cdot s_a = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο ΑΒΔ είναι (ΒΔ)=10 και (ΑΒ)²+ (ΑΔ)²=(ΒΔ)² δηλαδή

$$x^2 + (ΑΔ)^2 = 100$$

$$(ΑΔ) = \sqrt{100 - x^2}$$

$$0 < (ΑΔ) < 2\rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒ)(ΑΔ) = x\sqrt{100 - x^2}$$

Δ2.

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \frac{-2x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 5\sqrt{2} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \leq 5\sqrt{2}$$

Έτσι η f είναι γν.αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2}]$ και γν.φθίνουσα στο $[5\sqrt{2}, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 5\sqrt{2}$. Δηλαδή όταν $(ΑΒ) = 5\sqrt{2}$ και τότε $(ΑΔ) = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} = (ΑΒ)$. Άρα ΑΒΓΔ τετράγωνο.

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{98x} = \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}.$$

$$\Delta 4. \text{ Έχουμε ότι } 0 < P^2(A) \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{99} \leq \sqrt{100 - P^2(A)} < \sqrt{100} \text{ και } 0 < P(A-B) \leq 1$$

$$\text{οπότε } \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \in (0,1) \text{ αντίστοιχα } \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \in (0,1)$$

Στο $(0,1)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \Leftrightarrow$$

$$P(A-B) \sqrt{100 - P^2(A-B)} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$f(P(A-B)) \leq f(P(A)) \stackrel{\substack{0 < P(A) \leq 1 \\ 0 < P(A-B) \leq 1}}{\Leftrightarrow} P(A-B) \leq P(A)$$

που ισχύει γιατί $A-B \subseteq A$.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΚΑΜΜΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ