ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 262 (i) σχολικού βιβλίου

Α2. Σελίδα 141 σχολικού βιβλίου

Α3. Σελίδα 247 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\quad A_f=\Re$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)>0\Rightarrow 2x>0\Rightarrow x>0$$
$$f'(x)<0\Rightarrow x<0$$

x	-∞	0	+∞
f'(x)	-		+
f(x)	↘	ελάχ	↗

x $\in$(-∞,0] η f γνησίως φθίνουσα

x $\in$(0,+∞] η f γνησίως αύξουσα

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση χ=0 το f(0)=0.

Β2.

$$f''(x)=\frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow -3x^2+1=0\Rightarrow x=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f’’(x)	-	+	-	
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}}=\frac{1}{4}$$

$$f\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}}=\frac{1}{4}$$

Β3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+1}=0=\lambda$, επομένως έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1=\beta$,

άρα η ευθεία $y=1$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

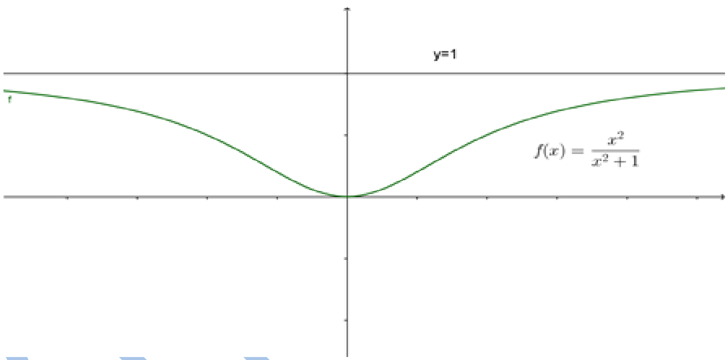
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^3+1}=0=\lambda$, επομένως έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1=\beta$,

άρα η ευθεία $y=1$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$
f'	—	—	+	+	
f''	—	+	+	—	
f					



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1$ παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^x-1$

$g(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	↘		↗

$g\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $g\left(0\right)=0$

Επομένως $g(x^2)\geq 0$, η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Γ2. Έχουμε ότι $f^2\left(x\right)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right|=\left|g\left(x^2\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right|=g\left(x^2\right)$

Για $x=0$ έχουμε ότι $f\left(0\right)=g\left(0\right)=0$.

Στο $\left(-\infty,0\right)$ και $\left(0,+\infty\right)$ έχουμε $f\left(x\right)\neq 0$ και f συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επομένως προκύπτουν οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f\left(x\right)=g(x^2),\quad \mathrm{x}\in\Re$

β) $f\left(x\right)=\begin{cases} g(x^2), & \mathrm{x}\geq 0 \\ -g(x^2), & \mathrm{x}<0 \end{cases}$

γ) $f\left(x\right)=\begin{cases} -g(x^2), & \mathrm{x}\geq 0 \\ g(x^2), & \mathrm{x}<0 \end{cases}$

δ) $f\left(x\right)=-g(x^2),\quad \mathrm{x}\in\Re$

Γ3. $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2x$

$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}-2$

$f'''(x)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=xe^{x^2}\left(8x^2+2\right)$

Για $x<0$ έχουμε $f'''(x)<0$ και f'' συνεχής άρα f'' είναι γν. φθίνουσα

Για $x>0$ έχουμε ότι $f'''(x)>0$ και f'' συνεχής άρα f'' είναι γν. αύξουσα.

Επομένως f είναι κυρτή.

Γ4. Θέτω $h(x)=f(x+3)-f(x)$

$$\begin{aligned}
&h'(x)=f'(x+3)(x+3)'-f'(x)\Leftrightarrow\\
&h'(x)=f'(x+3)-f'(x)\\
&x+3>x,\ f'\ \textit{γνησίως} \quad \textit{αύξουσα} \quad \textit{άρα}\\
&f'(x+3)>f'(x)\\
&h'(x)>0
\end{aligned}$$

Άρα η h(x) γνησίως αύξουσα ,οπότε 1-1.

$$h(|\eta\mu x|)=h(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x$$

Μοναδική ρίζα το x=0

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για να δείξουμε ότι $f(\pi)=\pi$ αρκεί:

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=f(\pi)$$

$$=\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left(\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx\right)=$$

$$f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0=$$
$$=-f(\pi)(-1)+f(0)1=\pi$$

Διότι $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\eta\mu x$

$$f(0)=\lim_{x\to 0} g(x)\eta\mu x=1\cdot 0=0$$
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\chi}{x}=1\cdot 1=1$$

Δ2.

α) $e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^{x}$ (1)

έστω ότι υπάρχει κάποιο $x_0\in\Re$:

$f'(0)=0$

Για $x=x_0$

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 1=e^{x_0}\Leftrightarrow \ln e^{x_0}=\ln 1\Leftrightarrow x_0=0$$

Δηλαδή $f'(0)=0$ άτοπο διότι $f'(0)=1$

β) $\left.\begin{array}{l} f'(x)\neq 0\forall x\in\Re \\ f'(0)=1,\ f'\sigma\upsilon\nu \end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)>0\forall x\in\Re$ f άρα γνησίως αύξουσα

Δ3.

F γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα $f(\Re)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f,\lim\limits_{x\to+\infty} f)=\Re$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Άρα $f(x)>0$ κοντά στο $+\infty$

$$\frac{-2}{f(\chi)}\le\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\frac{2}{f(\chi)}$$

Από κριτήριο παρεμβολής το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4) θέτω όπου $\ln x=u$, με αλλαγή μεταβλητής έχουμε: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}dx=du\\ x=1\Leftrightarrow u=0\\ x=e^{\pi}\Leftrightarrow u=\pi\end{cases}$

$$0\le u\le\pi\Leftrightarrow f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Leftrightarrow\int_0^{\pi}0du<\int_0^{\pi}f(u)du<\int_0^{\pi}\pi du$$

Άρα $0<\int_0^{\pi}f(u)du<\pi^2$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ

ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ **ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ**