ΠΡΟΣΘΕΤΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Δ

Τα θέματα Δ3 και Δ4 ειναι αυξημένης δυσκολίας και απαιτούν από τους εξεταζόμενους για την επίλυσή τους ιδιαίτερη ικανότητα και προσπάθεια. Κρίνονται δυσκολότερα από τα αντίστοιχα του 2014.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Σελ. 194 Σχολικού βιβλίου.

Α2. Σελ.188 Σχολικού βιβλίου.

Α3.Σελ 259 Σχολικού βιβλίου.

Α4.

α)Λ β)Σ γ)Λ δ)Σ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+16=4z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+4 \Leftrightarrow$$
$$3z\cdot\overline{z}=12 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα είναι κύκλος με K(0,0) και R=2

Β2.

α) $\overline{w}=\dfrac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\dfrac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\dfrac{2\dfrac{4}{z_1}}{\dfrac{4}{z_2}}+2\dfrac{\dfrac{4}{z_2}}{\dfrac{4}{z_1}}=2\dfrac{z_2}{z_1}+2\dfrac{z_1}{z_2}=w\in\Re$

(β)

$$\left.\begin{array}{l} W \in R \\ |w| \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$0 < |z_1 - z_2| \leq 4 \iff$$

$$0 < (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_2}) \leq 16 \iff$$
$$0 < |z_1|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2\,\overline{z_1} + |z_2|^2 \leq 16 \iff$$
$$0 < 8 - (z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) \leq 16 \iff$$
$$0 \leq 8 - 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 16 \iff$$
$$-8 \leq -2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 16 \iff$$
$$-8 \leq -2w \leq 8 \iff$$
$$-4 \leq w \leq 4$$

B3.

$$w = -4 \iff -2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \iff -2z_1 \cdot z_2 = z_1^{\,2} + z_2^{\,2} \iff (z_1 + z_2)^2 = 0 \iff z_1 + z_2 = 0 \iff z_1 = -z_2$$

$$A\Gamma = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)|$$
$$= |z_1|\,|1-2i| = |z_1|\sqrt{5}$$
$$B\Gamma = |z_2 - z_3| = |-z_1 - z_3| = |z_1 + z_3| = |z_1 + 2iz_1| = |z_1(1+2i)| = |z_1|\sqrt{5}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1})=0$$

Αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

Η $f'(x)>0$ στο $(-\infty,+\infty)$ και f συνεχής στο R.

Άρα η $f \nearrow$ στο R.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{DL'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{DL'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Γ2

$$f(e^{3-x}\cdot(x^2+1))=f(2)\overset{1-1}{\Rightarrow}e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow e^3\cdot e^{-x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3(x^2+1)}{e^x}=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{(x^2+1)}$$

$f(x)=\frac{e^3}{2}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και το $\frac{e^3}{2}\in(0,+\infty)$ επομένως η

$f(x)=\frac{e^3}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

Γ3

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2x\cdot f(4x)$$

$$\int_{2x}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{4x} f(t)<2x\cdot f(4x)\Leftrightarrow\int_{a}^{4x} f(t)-\int_{a}^{2x} f(t)<2x\cdot f(4x)$$

Θεωρούμε $h(x)=\int_a^x f(t)dt$ και εφαρμόζω θεώρημα Μέσης Τιμής στο [2x,4x] για την g (με x>0)

h συνεχής στο [2x,4x] γιατί η f είναι συνεχής και η $\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής

h παραγωγίσιμη στο (2x,4x)

$\exists \quad \xi \in (2x,4x):$

$$\mathrm{h}'(\xi)=\frac{\int_a^{4x} f(t)dt-\int_a^{2x} f(t)dt}{2x} \Leftrightarrow \mathrm{h}'(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

$$h(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow h'(x)=f(x) \Rightarrow \mathrm{h}''(\mathrm{x})=f'(x)>0$$

$$\xi<4x \overset{h'\uparrow}{\Rightarrow} h'(\xi)<h'(4x) \Rightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}<f(4x) \overset{x>0}{\Rightarrow} \int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)$$

Γ4.

Για χ>0 η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναντήσεων άρα συνεχής :

$$g'(x)=\frac{(\int_{2x}^{4x} f(t)dt))'\cdot x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{(4f(4x)-2f(2x))x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)}{x^2}=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)}{x^2}$$

Από Γ3 έχω $\int_{2x}^{4x} f(t)dt) < 2xf(4x) \Leftrightarrow$

$$-\int_{2x}^{4x} f(t)dt)+2xf(4x)>0 \ (1)$$

Για x>0:

2x<4x ⇒f(2x)<f(4x)⇒ 2xf(2x)<2xf(4x) (2) (f αύξουσα, 2x>0)

Άρα από τα (1), (2) έχω ότι g'(x)>0 για χ>0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1} = 4f(0)-2f(0) = 2f(0) = 2\frac{e^0}{0^2+1} = 2 = g(0)$$

Άρα g συνεχής στο $\chi_0=0$ άρα g γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)

Θέμα Δ

Δ1.

$f'(x)(e^{f(x)}+e^{-f(x)})=2 \quad / f(0)=0$

$f'(x)e^{f(x)} = -f'(x)e^{-f(x)}+2$

$e^{f(x)} = e^{-f(x)}+2x+C_1' \quad \overrightarrow{C_1'=0}$

$e^{f(x)} = \frac{1}{e^{f(x)}} + 2x \iff e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2+1$

$(e^{f(x)}-x)^2 = x^2+1 \iff \left|e^{f(x)}-x\right| = \sqrt{x^2+1}$ (1)

$e^{f(x)}-x \neq 0 \quad \left(\sqrt{x^2+1} \neq 0\right) \text{και συνεχής}$

$e^{f(0)}-0 = 1 > 0 \text{ άρα } e^{f(x)}-x > 0 \text{ για κάθε } x$

$(1) \Rightarrow e^{f(x)} = \sqrt{x^2+1}+x \iff f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

Δ2.

α) $f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \ f \text{ γνησίως αύξουσα}$

$f''(x)=\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

κυρτή (-∞, 0]

κοίλη $[0, +\infty)$

Σημείο καμπής (0, f(0))→(0,0)

β)

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (0,0) είναι
  y-f(0)=f'(0)(x-0) ⇒ y=x
- Η f κοίλη στο [0,1] άρα f(x)≤x, x∈[0,1]
- $E = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 \left(x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) dx =$
  $\int_0^1 x dx - \int_0^1 (x)' \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx$
  $= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[x ln(x + \sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
  $= \frac{1}{2} - (ln2) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$

Δ3.

- X>0 f γνησίως αύξουσα f(x)>f(0) ⇒f(x)>0
- h(x)=$\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{x}$, h'(x)= $e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^2(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{x} = h'(0) = 0$$

- $\lim_{x\to 0^+} x\ln(f(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnf x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{f(x)} \cdot f'(x) =^* 0$

  $* \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{f'(x)} = 0$

  $ά\rho\alpha \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{x} \cdot xlnf(x) \right) = 0$

Δ4.

h(x)=(x-2)(1-3$\int_0^{x-2} f(t^2)dt + (x-3)(8 - 3\int_0^x f^2(t)dt$

Η h είναι στο [2,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων…

h(2)= $3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 < 0$

h(3)= $1-3\int_0^1 f(t^2)dt > 0$

Στο [2,3] έχουμε ‘ότι: f κοίλη στο [2,3] άρα

f(x)<x⇒$f^2(x)<x^2$⇒$\int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

Άρα $\int_0^2 f^2(t)dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 < 0$

Ακόμα $f(x^2)<x^2$ ⇒$\int_0^1 f(x^2)dx < \int_0^1 x^2dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f(x^2)dx < \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Άρα -3·$\int_0^1 f(x^2)dx + 1 > 0$

Άρα h(2)·h(3)<0

Από θεώρημα Boltzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3) της h(x)=0

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΚΑΜΜΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ