ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ
ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα Α

Α1. Σελ 251 Σχολικού βιβλίου

Α2. Σελ 273 Σχολικού Βιβλίου

Α3. Σελ 150 Σχολικού βιβλίου

Α4. α)Λ β)Σ γ)Σ δ)Σ ε)Λ

Θέμα Β

Β1. Έστω $z = x + yi$ τότε

$$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+xi-2-i=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-2)+(x-1)i=0 \Leftrightarrow$$
$$x=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad x^2+y^2=2 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

Άρα $z=1+i$, $z=1-i$.

Β2.

$$w=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\frac{(1+i)(1+i)}{2}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3\cdot i^{4\cdot 9+3}=-3i$$

Β3.

$$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow$$
$$|u-3i|=5$$

Άρα είναι κύκλος με Κ(0,3) και ρ=5.

Θέμα Γ

Γ1.

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$
$$h''(x)=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}<0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \kappa o\acute{\iota}\lambda\eta.$$

Γ2.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) = 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h(\frac{2}{e^x+1}) < h(1)$$

Διότι $h(1) = 1 - \ln(e+1)$

Αλλά h γνησίως αύξουσα.

Επομένως $\frac{2}{e^x+1} < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Γ3.

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}) = 1 - 0 = 1$$

  $$\lim_{x\to-\infty} (h(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} (x - \ln(e^x+1) - x) = \lim_{x\to-\infty} (-\ln(e^x+1)) = 0$$

  Άρα, y=x η πλάγια ασύμπτωτη.

- Θέτουμε
  $e^x + 1 = u \Leftrightarrow e^x = u - 1 \Leftrightarrow x = \ln(u-1)$
  $u \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{u\to+\infty} [\ln(u-1) - \ln u] = \lim_{u\to+\infty} [\ln \frac{u-1}{u}] = 0$$

Άρα y=0 η οριζόντια ασύμπτωτη.

Γ4.

. φ(x)=e^x(h(x)+ln2)

Θεωρούμε κ(x)=h(x)+ln2,άρα κ(0)=0 και κ΄(x)=h΄(x)>0

Άρα,φ(x)>0 για x>0.

Οπότε,

E=$\int_0^1|\varphi(\chi)|dx=\int_0^1 e^x(x-\ln(e^x+1)+ln2)dx=\int_0^1 e^x x dx-\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)\,dx+\int_0^1 e^x ln2dx$

Έχουμε :$\int_0^1 x\,e^x dx=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx$=1.

Στο παρακάτω ολοκλήρωμα θέτω u=e^x+1 και du=e^xdx

$$\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)\,dx=\int_2^{e+1}(u)'\ln(u)\,du=[ulnu]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}1du$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1$$

Και $\int_0^1 e^x ln2\,dx=[e^x ln2]_0^1=eln2-ln2$

Άρα,

E=(e+1)(ln2-ln(e+1))+e

Θέμα Δ

Δ1.

- $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}(e^x)=1$

  $f(0)=1$

  Οπότε η f είναι συνεχής στο x=0

- Η f συνεχής για $x\neq 0$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η f συνεχής στο R.
- Για $x\neq 0$ $f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$

Θέτω $g(x)=xe^x-e^x+1$, συνεχής

$g'(x)=x\cdot e^x$

Οπότε στο $(-\infty,0)$, $g'(x)<0$

Και στο $(0,+\infty)$, $g'(x)>0$

Άρα στο $(-\infty,0)$ η g(x) είναι γνησίως φθίνουσα.

Και στο $(0,+\infty)$ η g(x) είναι γνησίως αύξουσα.

$g(x)>g(0)=0,\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Συνεπώς $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}^*$.

- $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}>0$

  Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ2.

α) θέτω

$k(x)=\int_1^{2f'(x)}f(u)du$

$k(0)=\int_1^{2f'(0)}f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0$

άρα $x=0$ λύση της $k(x)=0$

- Η f συνεχής και η $f'(x)$ παραγωγίσιμη,

με $f''(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}>0$ για κάθε x≠0

οπότε η κ(χ) είναι παραγωγίσιμη με $k'(x)=f(2f'(x))\cdot 2f''(x),x\in R^*$

- Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$ και συνεχής άρα

  $f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(0,+\infty)$ οπότε $f(x)>0$ στο R

Συνεπώς $k'(x)>0$ στο R^*, επομένως η Κ γνησίως αύξουσα στο R^*

Οπότε η $x=0$ είναι μοναδική λύση

β)

$M(x(t),\dfrac{e^{x(t)}-1}{x(t)})$

$x'(t)=2y'(t)\Rightarrow 2\dfrac{e^{x(t)}\cdot x'(t)\cdot x(t)-x'(t)\cdot(e^{x(t)}-1)}{(x(t))^2}=x'(t)$

$\overset{x(t)>0}{\Rightarrow} 2e^{x(t)}\cdot x(t)-2e^{x(t)}+2=(x(t))^2$

$\Rightarrow (2x(t)-2)e^{x(t)}-(x(t))^2+2=0$

- $(2x-2)e^x-x^2+2=0(1)$

Θέτω

$G(x)=2xe^x-2e^x-x^2+2$

$G'(x)=2e^x+2xe^x-2e^x-2x=2(e^x-1)>0$

$\left.\begin{array}{l} G(0)=0 \\ \text{Και} G\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \end{array}\right\}$ άρα μοναδική λύση της (1) X=0

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Α(0,1)

Δ3.

$g(x)=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2$

$g'(x)=2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)^2e^x+(e^x-e)^2\cdot(x-2)2=2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot(xe^x-e^x-e)$

$\bullet e^x-e>0\Leftrightarrow x>1$

$\bullet x-2>0\Leftrightarrow x>2$

Θέτω

$\bullet H(x)=xe^x-e^x-e$ συνεχής στο [1,2]

$\bullet H(1)=-e$

$\bullet H(2)=e^2-e$

$H(1)\cdot H(2)<0$

Από θ. Bolzano υπάρχει ξε(1,2) με Η(ξ)=0

•$H'(x) = xe^x > 0$ στο (0,+ ∞), η Η γνησίως αύξουσα και το ξ μοναδικό

- $x > \xi \overset{H\uparrow}{\Rightarrow} H(x) > H(\xi) = 0$
  $x < \xi \overset{H\uparrow}{\Rightarrow} H(x) < H(\xi) = 0$

Οπότε g'(x)≤0 στο (0,1] και στο [ξ,2]

Η g'(x)≥0 στο [1,ξ] και στο [2.+∞)

Η g γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και στο [ξ,2]

Και γνησίως αύξουσα στο στο [1,ξ] και στο [2.+∞)

Τελικά έχει τ.ελάχιστο στο χ=1 και στο χ=2 και τ. μέγιστο στο ξ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ-ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ-ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ-ΠΑΛΙΟΥΡΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ