

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα Α

A1. Σελ 251 Σχολικού βιβλίου

A2. Σελ 273 Σχολικού Βιβλίου

A3. Σελ 150 Σχολικού βιβλίου

A4. α)Λ β)Σ γ)Σ δ)Σ ε)Λ

Θέμα Β

B1. Έστω $z = x + yi$ τότε

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi - 2 - i = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2) + (x-1)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ και } x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

Άρα $z = 1 + i$, $z = 1 - i$.

B2.

$$w = 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left(\frac{(1+i)(1+i)}{2} \right)^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot i^{4 \cdot 9 + 3} = -3i$$

B3.

$$|u - 3i| = |4(1+i) - (1-i) - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow$$

$$|u - 3i| = 5$$

Άρα είναι κύκλος με Κ(0,3) και ρ=5.

Θέμα Γ

Γ1.

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$h''(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ άρα κοίλη.}$$

Γ2.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) = 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h\left(\frac{2}{e^x+1}\right) < h(1)$$

Διότι $h(1) = 1 - \ln(e+1)$

Αλλά η γνησίως αύξουσα.

Επομένως $\frac{2}{e^x+1} < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x+1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Γ3.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = 1 - 0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(e^x+1) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x+1)) = 0$$

Άρα, $y=x$ η πλάγια ασύμπτωτη.

- Θέτουμε

$$e^x + 1 = u \Leftrightarrow e^x = u - 1 \Leftrightarrow x = \ln(u - 1)$$

$$u \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} [\ln(u-1) - \ln u] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{u-1}{u}\right] = 0$$

Άρα $y=0$ η οριζόντια ασύμπτωτη.

Γ4.

• $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$

Θεωρούμε $\kappa(x)=h(x)+\ln 2$, άρα $\kappa(0)=0$ και $\kappa'(x)=h'(x) > 0$

Άρα, $\varphi(x) > 0$ για $x > 0$.

Οπότε,

$$E = \int_0^1 |\varphi(x)| dx = \int_0^1 e^x (x - \ln(e^x + 1) + \ln 2) dx = \int_0^1 e^x x dx - \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx + \int_0^1 e^x \ln 2 dx$$

$$\text{Έχουμε : } \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1.$$

Στο παρακάτω ολοκλήρωμα θέτω $u=e^x+1$ και $du=e^x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx &= \int_2^{e+1} (u)' \ln(u) du = [u \ln u]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} 1 du \\ &= (e+1) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Και } \int_0^1 e^x \ln 2 dx = [e^x \ln 2]_0^1 = e \ln 2 - \ln 2$$

Άρα,

$$E = (e+1)(\ln 2 - \ln(e+1)) + e$$

Θέμα Δ

Δ1.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο $x=0$

- Η f συνεχής για $x \neq 0$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η f συνεχής στο \mathbb{R} .

$$\bullet \text{ Για } x \neq 0 \quad f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}$$

Θέτω $g(x) = xe^x - e^x + 1$, συνεχής

$$g'(x) = x \cdot e^x$$

Οπότε στο $(-\infty, 0)$, $g'(x) < 0$

Και στο $(0, +\infty)$, $g'(x) > 0$

Άρα στο $(-\infty, 0)$ η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Και στο $(0, +\infty)$ η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

$$g(x) > g(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Συνεπώς $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

$$\bullet \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^{0/0}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1^{0/0}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ2.

α) Θέτω

$$k(x) = \int_1^{2f'(x)} f(u) du$$

$$k(0) = \int_1^{2f'(0)} f(u) du = \int_1^1 f(u) du = 0$$

άρα $x=0$ λύση της $k(x) = 0$

- Η f συνεχής και η $f'(x)$ παραγωγίσιμη,

$$\text{με } f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2) - 2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

οπότε η $k(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $k'(x) = f(2f'(x)) \cdot 2f''(x), x \in \mathbb{R}^*$

- Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και συνεχής άρα

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty) \text{ οπότε } f(x) > 0 \text{ στο } \mathbb{R}$$

Συνεπώς $k'(x) > 0$ στο \mathbb{R}^* , επομένως η K γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}^*

Οπότε η $x=0$ είναι μοναδική λύση

β)

$$M(x(t), \frac{e^{x(t)} - 1}{x(t)})$$

$$x'(t) = 2y'(t) \Rightarrow 2 \frac{e^{x(t)} \cdot x'(t) \cdot x(t) - x'(t) \cdot (e^{x(t)} - 1)}{(x(t))^2} = x'(t)$$

$$\stackrel{x(t) > 0}{\Rightarrow} 2e^{x(t)} \cdot x(t) - 2e^{x(t)} + 2 = (x(t))^2$$

$$\Rightarrow (2x(t) - 2)e^{x(t)} - (x(t))^2 + 2 = 0$$

- $(2x - 2)e^x - x^2 + 2 = 0(1)$

Θέτω

$$G(x) = 2xe^x - 2e^x - x^2 + 2$$

$$G'(x) = 2e^x + 2xe^x - 2e^x - 2x = 2(e^x - 1) > 0$$

$$G(0) = 0$$

Και Γνησίως αύξουσα

} άρα μοναδική λύση της (1) $X=0$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$

Δ3.

$$g(x) = (e^x - e)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$g'(x) = 2 \cdot (e^x - e) \cdot (x - 2)^2 e^x + (e^x - e)^2 \cdot (x - 2) \cdot 2 = 2 \cdot (e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot (xe^x - e^x - e)$$

- $e^x - e > 0 \Leftrightarrow x > 1$

- $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Θέτω

- $H(x) = xe^x - e^x - e$ συνεχής στο $[1,2]$

- $H(1) = -e$

- $H(2) = e^2 - e$

$$H(1) \cdot H(2) < 0$$



ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

Από θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (1,2)$ με $H(\xi)=0$

• $H'(x) = xe^x > 0$ στο $(0, +\infty)$, η H γνησίως αύξουσα και το ξ μοναδικό

- $x > \overset{H \uparrow}{\xi} \Rightarrow H(x) > H(\xi) = 0$
- $x < \overset{H \uparrow}{\xi} \Rightarrow H(x) < H(\xi) = 0$

Οπότε $g'(x) \leq 0$ στο $(0,1]$ και στο $[\xi,2]$

Η $g'(x) \geq 0$ στο $[1,\xi]$ και στο $[2,+\infty)$

Η g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και στο $[\xi,2]$

Και γνησίως αύξουσα στο $[1,\xi]$ και στο $[2,+\infty)$

Τελικά έχει τ.ελάχιστο στο $x=1$ και στο $x=2$ και τ. μέγιστο στο ξ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ-ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ-ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ-ΠΑΛΙΟΥΡΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ