

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$. Μονάδες 10

A2. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Τι ονομάζεται ως εφαπτομένη της C_f στο A ; Μονάδες 5

A3. Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις: Μονάδες 10

(α) Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει με την γραφική παράσταση C_f μόνο σε ένα κοινό σημείο.

(β) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών του παραπάνω διαστήματος θα είναι ανοικτό διάστημα.

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(δ) Αν $A(x_0, y_0)$ σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε θα είναι $(f^{-1} \circ f)(x_0) = y_0$.

(ε) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^2} = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$.

ΘΕΜΑ Β

Ευθεία ε περιστρέφεται γύρω από το σημείο της $P(4,2)$ διατηρώντας θετικό το συντελεστή διεύθυνσής της λ , ο οποίος μεταβάλλεται με ρυθμό 4 μονάδες το λεπτό. Κατά την διάρκεια της περιστροφής, η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B .

B1. Να υπολογίσετε το ρυθμό που μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου OAB , τη στιγμή $t = t_0$ κατά την οποία η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $K(1,-1)$. Μονάδες 10

Κατά την παραπάνω χρονική στιγμή t_0 η ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \mu\sqrt{x+v}$ $\mu, v \in \mathbb{R}$ στο σημείο P .

B2. Να προσδιορίσετε τις τιμές των μ, v . Μονάδες 8

B3. Αν $\mu = 2, v = -3$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία ε , την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 3x}{x} = 2, \quad F(9) = 0$$

G1. Να δείξετε ότι η C_F διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$. Μονάδες 4

G2. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο $O(0, F(0))$. Μονάδες 4

G3. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 6$ τέμνει την C_F σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,9)$. Μονάδες 5

G4. Αν η F στρέφει τα κοίλα άνω, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,9)$ στο οποίο η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Μονάδες 6

G5. Να αποδείξετε ότι: (i) $\int_0^2 F(x) dx > 10$ Μονάδες 3

(ii) $\int_0^9 F(x)dx > 9F(\xi)$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $\varphi(x) = e^x + x - 5$ $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα. Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in \mathbb{R}$. Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x) = \ln(5-x)$ ως προς την μονοτονία και κατόπιν να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$. Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $g(x_0) = x_0$. Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_φ στο σημείο της με τετμημένη $\ln \alpha$ $\alpha > 0$. Μονάδες 2

Δ6. Να αποδείξετε ότι: $e^x + x \geq (\alpha + 1)(x - \ln \alpha) + (\alpha + \ln \alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης