

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

#### ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα του Fermat. (10 μονάδες)

**A2.** Επιλέξτε την σωστή απάντηση στην παρακάτω ερώτηση: (4 μονάδες)

Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 2$  τότε:

(α) Η  $g$  δεν ορίζεται στο  $x_0 = 0$

(β)  $g'(0) = 0$

(γ) Η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$

(δ)  $g'(x) = 2$

(ε) Η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$

**A3.** Εξετάστε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, σημειώνοντας **(Σ)**ωστή ή **(Λ)**ανθασμένη. (5 μονάδες)

i. Αν για κάθε  $x$  που ανήκει σ' ένα σύνολο  $A$  ισχύει  $F'(x) < 0$ , τότε η  $F$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ .

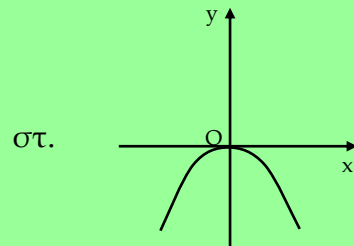
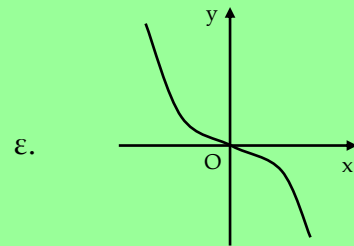
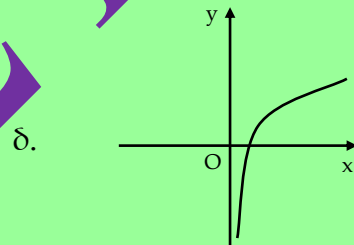
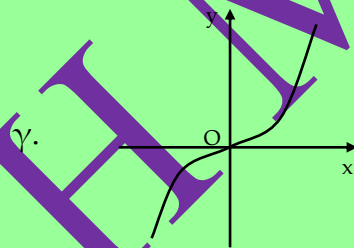
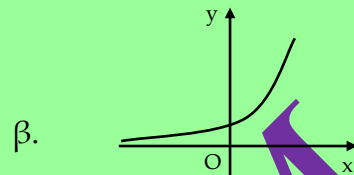
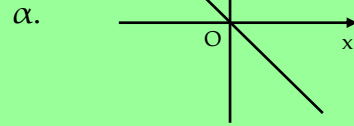
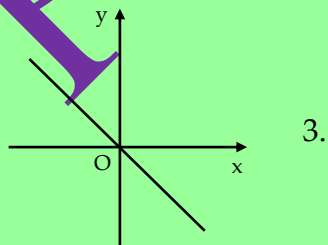
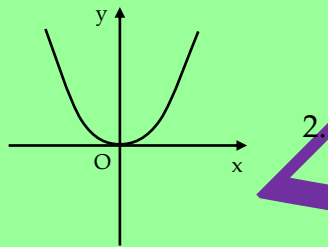
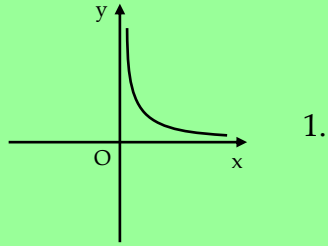
ii. Αν  $F'(x) < 0$  τότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη  $C_F$  στο σημείο  $x_0$  με τον άξονα  $x'x$  είναι αμβλεία.

iii. Συνάρτηση που η παράγωγός της μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παίρνει σταθερή τιμή σ' αυτό.

iv. Αν  $F$  πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

v. Αν μια συνάρτηση  $f$  έχει ακρότατο σε σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ , τότε στο σημείο αυτό η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη που είναι παράλληλη στο άξονα  $x'x$ .

**A4.** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της παραγώγου  $F'$  της 1<sup>ης</sup> στήλης, την γραφική παράσταση της  $F$  της 2<sup>ης</sup> στήλης. (6 μονάδες)



### ΘΕΜΑ Β

- B1.** Να βρείτε την συνάρτηση  $f$  που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1,5)$  και είναι τέτοια ώστε η κλίση της σε κάθε σημείο να είναι τετραπλάσια της τετμημένης του σημείου αυτού. (15 μονάδες)
- B2.** Έστω  $g$  συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο  $[0,4]$  με  $g(4)=1$  και  $g(0)=7$ .
- (α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της  $g$ . (5 μονάδες)
- (β) Αν  $\alpha \in (1,7)$  να δείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα στο  $[0,4]$ . (5 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο  $g(x) = \frac{e^x}{e^x + x^{2017}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Να εξετάσετε την  $g$  ως προς την μονοτονία. (8 μονάδες)
- Γ2.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2017}}{e^x}$ . (10 μονάδες)
- Γ3.** Βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της  $g$ . (7 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- Δ1.** Να μελετήσετε την  $F$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 5
- Δ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $F$ . Μονάδες 5
- Δ3.** Να δείξετε ότι είναι  $e^2 \geq 2^e$ . Μονάδες 8
- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$   $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Μονάδες 7

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης  
 Δέσποινα Σωτηροπούλου