Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελίδα 99-100

Α2. Θεωρία σελίδα 185

Α3. Θεωρία σελίδα 157

Α4. 1. Λ 2. Σ 3. Σ 4. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\ln x\cdot f(x)$ όπου:

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχής)

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ακόμα $g(1)=\ln 1\cdot f(1)=0$ και $g(2)=\ln 2\cdot f(2)=0$. Επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2): g'(\xi)=0$, όπου

$g'(x)=\left(\ln x\cdot f(x)\right)'=\frac{1}{x}\cdot f(x)+\ln x\cdot f'(x)$. Άρα, $\frac{1}{\xi}\cdot f(\xi)+\ln\xi\cdot f'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}\cdot f(\xi)=-\ln\xi\cdot f'(\xi)\Leftrightarrow f(\xi)=-\xi\cdot\ln\xi\cdot f'(\xi)$.

Β2. Έχουμε $g(x)=\ln x\cdot f(x)\Leftrightarrow g(x)=\ln x\cdot\left(3x^2-2x\right)$ με

$g'(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(3x^2-2x\right)+\ln x\cdot(6x-2)\Leftrightarrow g'(1)=1+\ln 1\cdot 4=1$ και

$g(1)=\ln 1\cdot(3-2)=0$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-0=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$.

Β3. Έχουμε ότι $g(x)=\ln x\cdot\left(3x^2-2x\right)$ με $g'(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(3x^2-2x\right)+\ln x\cdot(6x-2)\Leftrightarrow$

$g'(x)=(3x-2)+\ln x\cdot(6x-2)$ και $g''(x)=\dfrac{6x\cdot\ln x+9x-2}{x}$.

Θεωρούμε $h(x)=6x\cdot\ln x+9x-2$ που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=6\ln x+6+9=6\ln x+15>0$ και αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\ge 1$ και $h(x)\ge h(1)=7>0$. Άρα $g''(x)>0$ για κάθε $x\ge 1$ και g συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η g είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, C_g, θα βρίσκεται πάνω από την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,g(1))$. Άρα $g(x)\ge x-1 \Leftrightarrow \ln x\cdot(3x^2-2x)\ge x-1$.

Β4. Έχουμε ότι $\int_1^e \ln x\cdot(x^3-x^2)'\,dx=\left[\ln x\cdot(x^3-x^2)\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(x^3-x^2)'\,dx=$

$$=e^3-e^2-\int_1^e (x^2-x)\,dx = e^3-e^2-\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^e=e^3-e^2-\left[\left(\frac{e^3}{3}-\frac{e^2}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=e^3-e^2-\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2e^3}{3}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2e^3-3e^2+1}{6}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1$ και

$f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+1>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

με $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}<0$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	Γν. φθίνουσα		Γν. αύξουσα

Για $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ έχω $f'(x)<0$ και

f συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ άρα η συνάρτηση f

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, ενώ για $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ έχω $f'(x)>0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{e}$, το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

Ακόμα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DL'H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x^2}{x}=0$

Ενώ, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln x)=+\infty$. Επομένως το σύνολο τιμών θα είναι

$$f\left((0,+\infty)\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)\cup\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},0\right)\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$$

Γ2. Έχουμε ότι $x^x=e^{2017}\Leftrightarrow\ln x^x=\ln e^{2017}\Leftrightarrow x\cdot\ln x=2017\Leftrightarrow f(x)=2017$.

Για $x>\frac{1}{e}$ η f είναι γνησίως αύξουσα και $f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ όπου το $2017\in\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$. Άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2017$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα (α,β) και (β,γ) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης τιμής στα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ έχουμε ότι:

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta-\alpha}$$

Και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{\gamma\ln\gamma-\beta\ln\beta}{\gamma-\beta}.$$

Ακόμα $f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, για $\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{\gamma\ln\gamma-\beta\ln\beta}{\gamma-\beta}\underset{\gamma-\beta>0}{\overset{\beta-\alpha>0}{\Longrightarrow}}$$

$$(\gamma-\beta)\cdot(\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha)<(\beta-\alpha)\cdot(\gamma\ln\gamma-\beta\ln\beta)\Leftrightarrow(\gamma-\beta)\cdot\ln\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}<(\beta-\alpha)\cdot\ln\frac{\gamma^\gamma}{\beta^\beta}.$$

Γ4. Για $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ έχω $\ln x<0\overset{x>0}{\Rightarrow}x\ln x<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|f(x)|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{\frac{1}{e}}f(x)dx=\int_{1}^{\frac{1}{e}}(x\cdot\ln x)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^{\frac{1}{e}}-\int_1^{\frac{1}{e}}\left(\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\right)dx=\frac{1}{2e^2}\cdot(-1)-0-\int_1^{\frac{1}{e}}\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{2e^2}-\int_1^{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2e^2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\frac{1}{e}}=-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2}+\frac{1}{4}=\frac{e^2-3}{4e^2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού $x\neq-1$, έχουμε ότι $f'(x)=\frac{x\cdot e^{x+1}}{(x+1)^2}=\frac{x\cdot e^{x+1}+e^{x+1}-e^{x+1}}{(x+1)^2}=$

$$=\frac{e^{x+1}\cdot(x+1)-e^{x+1}}{(x+1)^2}$$

Επομένως, $f'(x)=\left(\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^{x+1}}{x+1}+c\underset{f(0)=e}{\overset{x=0}{\Longrightarrow}}f(0)=\frac{e^{0+1}}{0+1}+c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e=e+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα, $f(x)=\frac{e^{x+1}}{x+1}$ με $x\in\Re-\{-1\}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{x\cdot e^{x+1}}{(x+1)^2}>0$ για $x>0$ και είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και «1-1». Επομένως $f(g(x))=\dfrac{e^2}{2}\Leftrightarrow f(g(x))=f(1)\overset{f:\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} g(x)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-2=1\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-3=0$. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=2x^3-3x^2-3$ όπου $\varphi'(x)=6x^2-6x=6x\cdot(x-1)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=-3$, ενώ $\varphi(1)=-4$. Ακόμα $\varphi'(x)<0$ στο $(0,1)$ και συνεχής ως πολυωνυμική άρα φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ $\varphi'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ και φ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ ως πολυωνυμική , άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$, το $\varphi(1)=-4$. Τέλος $0\in\varphi([1,+\infty))=[-4,+\infty)$, όπου

x	0 1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	+
$\varphi(x)$	Γν. φθίνουσα	Γν. αύξουσα

$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x^2-3)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3)=+\infty$ και η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Δ3. α) Έχουμε ότι $\int_1^2 (x+1)^2\cdot f'(x)dx=\int_1^2 (x+1)^2\cdot\dfrac{x\cdot e^{x+1}}{(x+1)^2}dx=$

$=\int_1^2\left(x\cdot e^{x+1}\right)dx=\left[x\cdot e^{x+1}\right]_1^2-\int_1^2\left(e^{x+1}\right)dx=2e^3-e^2-\left[e^{x+1}\right]_1^2=$

$=2e^3-e^2-e^3+e^2=e^3$.

Επομένως $L(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$ με $D_L=(0,1]$ και $L'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$

για κάθε $x\in(0,1)$ και $L(x)$ συνεχής στο $(0,1]$ ως διαφορά συνεχώς συναρτήσεων , άρα $L(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και επομένως $L(x)$ είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται.

β) Έχουμε ότι $D_{L^{-1}}=L((0,1])\overset{L\text{ γν.αύξουσα}}{=}\left(\lim\limits_{x\to0^+}L(x),L(1)\right]$ με

$\lim\limits_{x\to0^+}L(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)=-\infty$ και $L(1)=\ln1-0=0$.

Άρα, $D_{L^{-1}}=(-\infty,0]$.

Δ4. Έχουμε ότι $0 < L^{-1}(x) \le 1 \xRightarrow{\cdot x^2 > 0} 0 < x^2 \cdot L^{-1}(x) \le x^2$, όπου $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot L^{-1}(x)\right) = 0$.

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κατσιμπράς*
Μαθηματικός