

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 τότε είναι και συνεχής σε αυτό. (Μονάδες 7)
- A2.** Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης F μιας συνάρτησης f που ορίζεται σε διάστημα Δ . (Μονάδες 5)
- A3.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ'ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in \Delta$. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της συνάρτησης f ; (Μονάδες 5)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος: (Μονάδες 8)
- (i). Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ . Αν $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .
- (ii) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f .
- (iii) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$$

- (iv) Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο x_0 τότε ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

ΘΕΜΑ Β

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$.

B1. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -\xi \ln \xi \cdot f'(\xi)$.
(Μονάδες 5)

B2. Αν $f(x) = 3x^2 - 2x$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x \cdot f(x)$ στο σημείο της $A(1, g(1))$.
(Μονάδες 5)

B3. Να αποδείξετε ότι $\ln x \cdot (3x^2 - 2x) \geq x - 1$ για κάθε $x \geq 1$
(Μονάδες 10)

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e g(x) dx$.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^x = e^{2017}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
(Μονάδες 7)

Γ3. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι $(\gamma - \beta) \cdot \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta - \alpha) \cdot \ln \frac{\gamma^\gamma}{\beta^\beta}$.
(Μονάδες 7)

Γ4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $(x+1)^2 \cdot f'(x) = e^{x+1}$, όπου $f(0) = e$. Δίνονται ακόμα οι συναρτήσεις με τύπους:

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2 \quad L(x) = \frac{(\ln x - \sqrt{1-x}) \cdot \int_1^2 (x+1)^2 f'(x) dx}{e^3}$$

- Δ1.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
- Δ2.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = \frac{e^2}{2}$ στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $L(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντιστρόφου $L^{-1}(x)$. (Μονάδες 6)
- Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot L^{-1}(x))$. (Μονάδες 6)

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κατσιμπράς*
Μαθηματικός