

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 23
A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 104
A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 113-114
A4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ και συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$
 επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R} - \{1\}$.

B2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	∩		∪

$f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 1)$ και f συνεχής στο $(-\infty, 1)$, επομένως f κοίλη στο $(-\infty, 1)$

$f''(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$ και f συνεχής στο $(1, +\infty)$, επομένως f κυρτή στο $(1, +\infty)$.

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Επομένως η οριζόντια ασύμπτωτη είναι η $y = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. Έχουμε ότι } f'(x) - f(x) = e^x \cdot (3x^2 + 1) \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) \cdot e^{-x})' = (x^3 + x)' \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} = x^3 + x + c \xrightarrow{x=0} f(0) \cdot e^0 = c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^x \cdot (x^3 + x).$$

$$\text{Γ2. Ακόμα } g(x) = \frac{e^x \cdot (x^3 + x)}{e^x} = x^3 + x$$

με g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ και αφού g συνεχής στο \mathbb{R} έχουμε

$$\text{ότι είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}, \text{ επομένως } g(e^x) \leq g(1-x) \Leftrightarrow e^x \leq 1-x$$

$$\Leftrightarrow e^x + x - 1 \leq 0$$

Θεωρούμε $h(x) = e^x + x - 1$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = e^x + 1 > 0$ και αφού h συνεχής στο \mathbb{R} η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} με προφανή ρίζα την $x = 0$, αφού

$$h(0) = e^0 + 0 - 1 = 0. \text{ Επομένως } h(x) \leq h(0) \Rightarrow x \leq 0.$$

Γ3. Έχουμε $\varphi^3(x) + \varphi(x) \geq x \Leftrightarrow g(\varphi(x)) \geq x$. Όμως g γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα g είναι 1-1 και επομένως ορίζεται η αντίστροφη της g , g^{-1} η οποία είναι και αυτή γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} αφού για κάθε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$ ισχύει ότι

$$y_1 < y_2 \Rightarrow g(g^{-1}(y_1)) < g(g^{-1}(y_2)) \Rightarrow g^{-1}(y_1) < g^{-1}(y_2).$$

$$\text{Τότε } g^{-1}(g(\varphi(x))) \geq g^{-1}(x) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq g^{-1}(x) \Rightarrow \int_0^{10} \varphi(x) dx \geq \int_0^{10} g^{-1}(x) dx.$$

$$\text{Για το } \int_0^{10} g^{-1}(x) dx \text{ θέτω } x = g(u) \Rightarrow dx = g'(u) du.$$

Για $x = 0$ έχω $g(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = 10$ έχω $g(u) = 10 \Leftrightarrow u = 2$, επομένως

$$\int_0^{10} g^{-1}(x) dx = \int_0^2 g^{-1}(g(u)) \cdot g'(u) du = \int_0^2 u \cdot g'(u) du = \int_0^2 u \cdot (3u^2 + 1) du =$$

$$\int_0^2 (3u^3 + u) du = \left[\frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right]_0^2 = 3 \cdot \frac{16}{4} + \frac{4}{2} = 14. \text{ Άρα } \int_0^{10} \varphi(x) dx \geq 14$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $f(x) - G(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) - G'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c \xrightarrow{x=1} f^2(1) = e^2 + c \Leftrightarrow e^2 = e^2 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Επομένως $f^2(x) = e^{2x} \Rightarrow |f(x)| = |e^x| \xrightarrow{f(x) > 0} f(x) = e^x$

Ακόμα για την g έχουμε $f(x) \cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow e^x \cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = e^x$

Επομένως $f(x) = g(x)$.

Δ2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$ Θέτω $\frac{1}{x} = u$ και όταν $x \rightarrow 0^-$ τότε $u \rightarrow -\infty$.

Επομένως $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u \cdot e^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{-u}}{u} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-u}}{1} = -\infty$.

Δ3. $\int_0^{\ln 2} (f(x^2) + f(x)) \cdot x dx = \int_0^{\ln 2} (e^{x^2} + e^x) \cdot x dx = \int_0^{\ln 2} (xe^{x^2} + xe^x) \cdot dx =$

$$= \int_0^{\ln 2} xe^{x^2} dx + \int_0^{\ln 2} xe^x dx.$$

- $\int_0^{\ln 2} xe^{x^2} dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{2}(x^2)' e^{x^2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^{\ln 2} = \frac{e^{\ln^2 2} - 1}{2}$

- $\int_0^{\ln 2} xe^x dx = \left[xe^x \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2\ln 2 - \left[e^x \right]_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1$

Επομένως $\int_0^{\ln 2} (f(x^2) + f(x)) \cdot x \, dx = \frac{e^{\ln^2 2} - 1}{2} + 2 \ln 2 - 1.$

Δ4. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $1 + x < e^x < 1 + xe^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x < e^x - 1 < xe^x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = e^x$ και εφαρμόζουμε Θεώρημα μέσης τιμής στο $[0, x]$.

f συνεχής στο $[0, x]$ ως εκθετική συνάρτηση

f παραγωγίσιμη στο $(0, x)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1)$$

Ακόμα, $0 < \xi < x \Rightarrow e^0 < e^\xi < e^x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x.$

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κατσιμπράς*
 Μαθηματικός