

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες.

A2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο A .

A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$ με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$ η οποία έχει ασύμπτωτη.

δ) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$ με $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R} - \{1\}$.

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή και τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη. Υπάρχουν σημεία καμψής;

B3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης f στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\frac{f'(x) - f(x)}{3x^2 + 1} = e^x$

με $f(0) = 0$ και $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

Γ1. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Γ2. Να λυθεί η ανίσωση $g(e^x) - g(1-x) \leq 0$

Γ3. Αν για την συνεχή συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi^3(x) + \varphi(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\int_0^{10} \varphi(x) dx \geq 14$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} με $f(x) > 0$ όπου $f(x) \cdot g(x) = e^{2x}$ και G η αρχική της g για την οποία ισχύει $f(x) - G(x) = 1$

Δ1. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν αυτή διέρχεται από το σημείο $A(1, e)$ και να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

Δ2. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

Δ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ln 2} (f(x^2) + f(x)) \cdot x dx$

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $1 + x < f(x) < 1 + x \cdot f(x)$.

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: Ευθύμης Κατσιμπράς
 Μαθηματικός