Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **(α)** Σχολικό σελ 76
(β) Σχολικό σελ 31, 33
(γ) Σχολικό σελ 73

Α2. Λάθος, Λάθος, Σωστή, Λάθος, Λάθος, Σωστή, Σωστή, Λάθος, Σωστή, Λάθος.

Α3. 1γ, 2α, 3α, 4δ, 5δ, 6β, 7δ, 8α

ΘΕΜΑ Β

Β1. **(α)** Προκύπτει εύκολα ότι είναι συνεχής στο $\left[-2,1\right)\cup\left(1,3\right)\cup\left(3,5\right]$ και ασυνεχής στο $x_0=1$.

(β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (αποδεικνύεται με ορισμό) στο $\left(3,5\right]$. Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$f\left((3,5]\right)=\left(\lim_{x\to 3^+}f(x),\ f(5)\right]=\left(1-e^2,0\right]$$

Β2. **(α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με

$$x_1<x_2$$

$$x_1^3<x_2^3 \quad \text{και} \quad \ln x_1<\ln x_2$$

$$x_1^3+\ln x_1<x_2^3+\ln x_2$$

$$x_1^3+\ln x_1-e<x_2^3+\ln x_2-e$$

$$h\left(x_1\right)<h\left(x_2\right)$$

Έτσι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$

(β) Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

$$x_1 < x_2$$

$$h(x_1) < h(x_2) \quad \text{(h γνησίως αύξουσα)}$$

$$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{(g γνησίως αύξουσα)}$$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\Phi(2x)-5}{2x^2-7x}$ με x κοντά στο 2.

Θα είναι $\Phi(2x) = (2x^2-7x)g(x)+5$ και $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -\infty$.

Τότε

$$\lim_{x\to 4}\Phi(x) = \lim_{\omega\to 2}\Phi(2\omega) =$$

$$= \lim_{\omega\to 2}\left[(2\omega^2-7\omega)g(\omega)+5\right] =$$

$$= (8-14)(-\infty)+5 =$$

$$= +\infty$$

Γ2. Το όριο έχει νόημα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Για $\alpha \neq 7$ είναι

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x-\alpha} = \frac{\lim\limits_{x\to 7}(x^2-8x+7)}{\lim\limits_{x\to 7}(x-\alpha)} = \frac{0}{7-\alpha} = 0$$

- Για $\alpha = 7$ είναι

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x-\alpha}=\lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x-7}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-1)}{x-7}=$$
$$=\lim_{x\to 7}(x-1)=6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x\neq 0$ είναι

$$x\cdot f(x)+3\eta\mu x=x^2$$
$$x\cdot f(x)=x^2-3\eta\mu x$$
$$f(x)=\frac{x^2-3\eta\mu x}{x}$$

Στο $x_0=0$ επειδή η f είναι συνεχής θα έχουμε

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3\eta\mu x}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x-3\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$
$$=0-3\cdot 1=-3$$

Άρα είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3\eta\mu x}{x} & x\neq 0\\ -3 & x=0\end{cases}$

Δ2. Για $x>0$ είναι

$$-1\leq \eta\mu x\leq 1$$
$$-\frac{1}{x}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ εφαρμόζοντας κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

Τελικά το ζητούμενο όριο θα είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 3\frac{\eta\mu x}{x}\right) = $$
$$= +\infty - 3\cdot 0 =$$
$$= +\infty$$

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{-x}$ $x \in [0,+\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - e^{-x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$ θα υπάρχει $\mu > 0$ ώστε $g(\mu) > 0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\mu]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και της εκθετικής $y = e^{-x}$.
- $\left.\begin{cases} g(0) = f(0) - e^0 = -3 - 1 = -4 \\ g(\mu) > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(\mu) < 0$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\mu)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Έτσι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα x_0.

– – – – –

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου