

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** (α) Να διατυπώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε το θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών για μια συνεχή συνάρτηση F στο διάστημα $[α, β]$. (Μονάδες 5)
- (β) Πότε μια συνάρτηση F ορισμένη σ' ένα σύνολο A ονομάζεται γνησίως αύξουσα και πότε λέγεται "1-1"; (Μονάδες 3)
- (γ) Πότε μια συνάρτηση F λέμε ότι είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$; (Μονάδες 3)
- A2.** Να εξετάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, σημειώνοντας (Σ)ωστή ή (Λ)αν-θασμένη.. (Μονάδες 10)
- (1) Οι συναρτήσεις $F(x) = x \cdot \ln x^2$, $g(x) = 2 \cdot x \cdot \ln x$ είναι ίσες.
 - (2) Η συνάρτηση $y = -\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.
 - (3) Η συνάρτηση $y = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ δεν αντιστρέφεται.
 - (4) Η γραφική παράσταση της $h(x) = x^2 - 1 - 3 \cdot \ln(x - 1)$ διέρχεται από το σημείο $K(1, 0)$.
 - (5) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σύνολο A και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο A .
 - (6) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι "1-1", αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
 - (7) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας "1-1" συνάρτησης το πολύ σ' ένα σημείο.
 - (8) Αν μια συνάρτηση F είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα Δ , τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της F^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $F(\Delta)$.
 - (9) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f , είναι ένα διάστημα.
 - (10) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει ακρότατα.

A3. Να αντιστοιχίσετε τα όρια της 1^{ης} στήλης με τις αντίστοιχες τιμές τους στην 2^η στήλη.

1 ^η στήλη (όρια)		2 ^η στήλη (τιμές ορίων)	
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	1	α	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$	2		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017}{x}$	3	β	1
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$	4		
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017}{x^2}$	5	γ	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$	6		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$	7	δ	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$	8		

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{αν } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{αν } 1 < x < 3 \\ e^{x-3} - e^2 & \text{αν } 3 < x \leq 5 \end{cases}$

(α) Να εξετάσετε την f ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

(β) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της όταν $x \in (3, 5]$.

(Μονάδες 8)

B2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $h(x) = x^3 + \ln x - e$ για κάθε $x > 0$ με:

- Η g είναι γνησίως αύξουσα.
- $(g \circ f)(x) = h(x)$ για κάθε $x > 0$

- (α) Δείξτε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ (5 μονάδες)
- (β) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \Phi(x)$ όταν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Phi(2x) - 5}{2x^2 - 7x} = -\infty$. (10 μονάδες)

Γ2. Να υπολογίζετε το $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. (15 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής με $x \cdot f(x) + 3\eta\mu x = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθεί ο τύπος της f . (Μονάδες 10)

Δ2. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

Δ3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα. (Μονάδες 10)

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
 Δέσποινα Σωτηροπούλου