

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

(1<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** (α) Να διατυπώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε το θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών για μια συνεχή συνάρτηση  $F$  στο διάστημα  $[α, β]$ . (Μονάδες 5)
- (β) Πότε μια συνάρτηση  $F$  ορισμένη σ' ένα σύνολο  $A$  ονομάζεται γνησίως αύξουσα και πότε λέγεται "1-1"; (Μονάδες 3)
- (γ) Πότε μια συνάρτηση  $F$  λέμε ότι είναι συνεχής στο διάστημα  $[α, β]$ ; (Μονάδες 3)
- A2.** Να εξετάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, σημειώνοντας (Σ)ωστή ή (Λ)αν-θασμένη.. (Μονάδες 10)
- (1) Οι συναρτήσεις  $F(x) = x \cdot \ln x^2$ ,  $g(x) = 2 \cdot x \cdot \ln x$  είναι ίσες.
  - (2) Η συνάρτηση  $y = -\sqrt{x}$  είναι γνησίως αύξουσα.
  - (3) Η συνάρτηση  $y = x^4$ ,  $x \in \mathbb{R}$  δεν αντιστρέφεται.
  - (4) Η γραφική παράσταση της  $h(x) = x^2 - 1 - 3 \cdot \ln(x - 1)$  διέρχεται από το σημείο  $K(1, 0)$ .
  - (5) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα σύνολο  $A$  και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $A$ .
  - (6) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι "1-1", αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
  - (7) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας "1-1" συνάρτησης το πολύ σ' ένα σημείο.
  - (8) Αν μια συνάρτηση  $F$  είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta$ , τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της  $F^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $F(\Delta)$ .
  - (9) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$ , είναι ένα διάστημα.
  - (10) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα  $\Delta$  έχει ακρότατα.

**A3.** Να αντιστοιχίσετε τα όρια της 1<sup>ης</sup> στήλης με τις αντίστοιχες τιμές τους στην 2<sup>η</sup> στήλη.

1 <sup>η</sup> στήλη (όρια)		2 <sup>η</sup> στήλη (τιμές ορίων)	
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	1	α	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$	2		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017}{x}$	3	β	1
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$	4		
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017}{x^2}$	5	γ	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$	6		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$	7	δ	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$	8		

(Μονάδες 4)

**ΘΕΜΑ Β**

B1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{αν } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{αν } 1 < x < 3 \\ e^{x-3} - e^2 & \text{αν } 3 < x \leq 5 \end{cases}$

(α) Να εξετάσετε την **f** ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

(β) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της όταν  $x \in (3, 5]$ .

(Μονάδες 8)

**B2.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $h(x) = x^3 + \ln x - e$  για κάθε  $x > 0$  με:

- Η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα.
- $(g \circ f)(x) = h(x)$  για κάθε  $x > 0$

- (α) Δείξτε ότι η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  (5 μονάδες)
- (β) Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . (5 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 4} \Phi(x)$  όταν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Phi(2x) - 5}{2x^2 - 7x} = -\infty$ . (10 μονάδες)

**Γ2.** Να υπολογίζετε το  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha}$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (15 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι συνεχής με  $x \cdot f(x) + 3\eta\mu x = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ . (Μονάδες 10)

**Δ2.** Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (Μονάδες 5)

**Δ3.** Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = e^{-x}$  έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα. (Μονάδες 10)

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης  
 Δέσποινα Σωτηροπούλου