

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελίδα 217

A2. Θεωρία σελίδα 128

A3. Θεωρία σελίδα 104

A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$B1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(2-x)}{x-1} = -12 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x^2) - f(1)] - [f(2-x) - f(1)]}{x-1} = -12 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(1)}{x-1} = -12 \quad (1)$$

• Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1}$ θέτω $x^2 = y$. Για $x \rightarrow 1$ έχω $y \rightarrow 1$ και $x = \sqrt{y}$ επομένως

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{\sqrt{y} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{[f(y) - f(1)](\sqrt{y} + 1)}{y - 1} = 2f'(1), \text{ αφού } f'(1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1}$$

• Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(1)}{x-1}$ θέτω $2-x = y \Leftrightarrow x = 2-y$. Για $x \rightarrow 1$ έχω $y \rightarrow 1$ κ

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{2-y-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{-(y-1)} = -f'(1).$$

$$(1) \Rightarrow 2f'(1) - (-f'(1)) = -12 \Leftrightarrow 3f'(1) = -12 \Leftrightarrow f'(1) = -4.$$

$$\text{Ακόμα } f'(x) = \frac{-\eta\mu[\pi(x-1)] \cdot \pi}{\pi} - 2\alpha x \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow f'(1)=-4} - 4 = -\eta\mu 0 - 2\alpha \Leftrightarrow -2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

B2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} με

$$f''(x) = (-\eta\mu[\pi(x-1)] - 4x)' \Leftrightarrow f''(x) = -\sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)] \cdot \pi - 4 < 0, \text{ αφού}$$

$$\sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)] \geq -1 \Leftrightarrow -\pi \cdot \sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)] \leq \pi \Leftrightarrow -\pi \cdot \sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)] - 4 \leq \pi - 4 < 0$$

και f συνεχής στο \mathfrak{R} ως παραγωγίσιμη επομένως η f είναι κοίλη στο \mathfrak{R} .

B3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , C_f στο

$$A(1, f(1)) \text{ είναι } y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \text{ με } f(1) = \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{\pi} - \alpha + 1 = \frac{1}{\pi} - 2 + 1 = \frac{1}{\pi} - 1.$$

$$\text{Άρα } y - \left(\frac{1}{\pi} - 1\right) = -4 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\pi} + 1 = -4x + 4 \Leftrightarrow y = -4x + 3 + \frac{1}{\pi}.$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο \mathfrak{R} επομένως η εξίσωση εφαπτομένης βρίσκεται πάνω από

την C_f στο $A(1, f(1))$. Άρα, $f(x) \leq -4x + 3 + \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)]}{\pi} - (2x^2 - 1) \leq -4x + 3 + \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)]}{\pi} \leq 2x^2 - 4x + 2 + \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu[\pi(x-1)] \leq 2\pi \cdot (x-1)^2 + 1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $2e^{f(x)} = e^{f^2(x)} \cdot f'(x) + f'(x) \stackrel{e^{f(x)}}{\Leftrightarrow} 2 = e^{f(x)} \cdot f'(x) + \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c \stackrel{x=0}{\Leftrightarrow} \stackrel{f(0)=0}{c=0}.$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \stackrel{g(x)=e^{f(x)}}{\Leftrightarrow} g(x) - \frac{1}{g(x)} = 2x \Leftrightarrow \frac{g^2(x) - 1}{g(x)} = 2x \Leftrightarrow$$

$$g^2(x) - 1 = 2x \cdot g(x) \Leftrightarrow g^2(x) - 2x \cdot g(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$g^2(x) - 2x \cdot g(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow (g(x) - x)^2 = 1 + x^2.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = g(x) - x$, επομένως

$$h^2(x) = 1 + x^2 \Leftrightarrow |h(x)| = \sqrt{1 + x^2}. \text{ Η εξίσωση } h(x) = 0 \text{ δεν έχει ρίζες στο } \mathfrak{R},$$

επομένως $h(x) \neq 0$ και συνεχής, άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο με

$$h(0) = g(0) = e^{f(0)} = 1 > 0 \text{ και επομένως } h(x) > 0, \text{ άρα}$$

$$h(x) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow g(x) - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow g(x) = x + \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Επομένως $f'(x) > 0$ στο \mathbb{R} και f συνεχής επομένως f στο \mathbb{R} .

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f''(x) = \frac{-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	∪	∩	
	σ.κ.		

Η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής το $f(0) = 0$.

Γ4. $E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x| dx$ όπου $f(x) \leq x$ γιατί η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0,1]$ και

επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σημείο $(0, f(0))$ που είναι

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \text{ με } f(0) = 0 \text{ και } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(0) = 1, \text{ άρα}$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x. \text{ Επομένως}$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 (x)' f(x) dx =$$

$$\frac{1}{2} - [x \cdot f(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$\frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + [\sqrt{x^2+1}]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+5h) - f(1)] - [f(1-h) - f(1)]}{h} = 0$

Για το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h}$ θέτω $1+5h = x \Leftrightarrow h = \frac{x-1}{5}$. Όταν $h \rightarrow 0$ τότε $x \rightarrow 1$,
επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\frac{x-1}{5}} = 5 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 5 \cdot f'(1)$.

Για το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$ θέτω $1-h = x \Leftrightarrow h = 1-x \Leftrightarrow h = -(x-1)$. Όταν $h \rightarrow 0$
τότε $x \rightarrow 1$, επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{-(x-1)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -f'(1)$.

Άρα $5 \cdot f'(1) - f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$.

Για $x \in (0,1)$ έχω f' γνησίως αύξουσα άρα $x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$ και f συνεχής
στο $(0,1]$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Για $x \in (1,+\infty)$ έχω f' γνησίως αύξουσα άρα $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$ και f συνεχής
στο $[1,+\infty)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως η συνάρτηση f
παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$.

Δ2. Η φ είναι παραγωγίσιμη, αφού g παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$\varphi'(x) = g'(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \geq 0$ αφού $f(x) \geq f(1) = 1$ και $x-1 > 0$ για κάθε
 $x \in (1,+\infty)$ και αφού φ συνεχής έχουμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Για την ανίσωση θεωρούμε $h(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x)$ όπου h παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
με $h'(x) = \Phi'(x+1) - \Phi'(x) \Leftrightarrow h(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$.

Για $x+1 > x \xRightarrow{\varphi \text{ γν.αύξουσα}} \varphi(x+1) > \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x+1) - \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και h
συνεχής άρα h γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Η ανίσωση γράφεται

$$h(8x^2 + 5) > h(2x^4 + 5) \xRightarrow{h \text{ γν.αυξ.}} 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow 4x^2 > x^4 \Leftrightarrow 4x^2 - x^4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(4 - x^2) > 0 \xRightarrow{x^2 \geq 0} 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Δ3. Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g''(x) = (g'(x))' =$

$$= \left(\frac{f(x) - 1}{x-1} \right)' \Leftrightarrow g''(x) = \frac{f'(x) \cdot (x-1) - (f(x) - 1)}{(x-1)^2} (1).$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f στο $[1, x]$

Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ ως παραγωγίσιμη και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x - 1) = f(x) - f(1) \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} g''(x) = \frac{f'(x) \cdot (x - 1) - f'(\xi)(x - 1)}{(x - 1)^2} \Leftrightarrow g''(x) = \frac{(x - 1) \cdot (f'(x) - f'(\xi))}{(x - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty) \text{ αφού για } \xi < x \stackrel{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow$$

$f'(x) - f'(\xi) > 0$. Η εξίσωση $(\alpha - 1)\varphi(x) = (f(\alpha) - 1) \cdot (x - \alpha)$ έχει προφανή ρίζα την

$x = \alpha$ αφού $(\alpha - 1)\varphi(x) = (f(\alpha) - 1) \cdot (x - \alpha) \stackrel{x=\alpha}{\Rightarrow} (\alpha - 1) \cdot \varphi(\alpha) = 0$ που ισχύει γιατί $\varphi(\alpha) = g(\alpha) - g(\alpha) = 0$. Θα δείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι και μοναδική.

Θεωρούμε $K(x) = (\alpha - 1)\varphi(x) - (f(\alpha) - 1) \cdot (x - \alpha)$ παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$K'(x) = (\alpha - 1)\varphi'(x) - (f(\alpha) - 1) \Leftrightarrow K'(x) = (\alpha - 1) \left[\varphi'(x) - \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \right] \Leftrightarrow$$

$$K'(x) = (\alpha - 1) [\varphi'(x) - g'(\alpha)]. \text{ Για } x > \alpha \stackrel{g' \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} g'(x) > g'(\alpha) \stackrel{g'(x) = \varphi'(x)}{\Leftrightarrow}$$

$\varphi'(x) > g'(\alpha) \Leftrightarrow \varphi'(x) - g'(\alpha) > 0$ άρα $K'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$ και $K(x)$ συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$ επομένως $K(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$.

$$\text{Για } x < \alpha \stackrel{g' \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} g'(x) < g'(\alpha) \stackrel{g'(x) = \varphi'(x)}{\Leftrightarrow} \varphi'(x) < g'(\alpha) \Leftrightarrow \varphi'(x) - g'(\alpha) < 0$$

Άρα $K'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$ και $K(x)$ συνεχής στο $(-\infty, \alpha]$ άρα $K(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$. Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \alpha$ το $K(\alpha) = 0$. Άρα $K(x) \geq K(\alpha) = 0$ και η εξίσωση $(\alpha - 1) \cdot \varphi(x) = (f(\alpha) - 1) \cdot (x - \alpha)$ έχει μοναδική την ρίζα την $x = \alpha$.

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κασιμπράς*
Μαθηματικός