ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Θέμα Α

Α1. Σελ. 28 σχολικού βιβλίου

Α2. Σελ. 14 σχολικού βιβλίου

Α3. Σελ. 87 σχολικού βιβλίου

Α4. Α)Λ Β)Σ Γ)Λ Δ)Λ Ε)Λ

Θέμα Β

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$

$A=\{\omega_1,\omega_4\}$

$B=\{\omega_1,\omega_3\}$

Β1.

- $$P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$
$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x}\,\cancel{(x+1)}}{x\cancel{^2}\,\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-2}=\frac{1}{4}$$

- $$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\ln x+\frac{\cancel{x}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\ln x}{3}+\frac{1}{3}$$
$$P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}$$

Β2.

$A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

$$P(A')=P(\omega_2)+P(\omega_3)=P(\omega_2)+\frac{1}{3}$$

- $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le P(\omega_2) + \frac{1}{3} \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 \le P(\omega_2) \le \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \le P(\omega_2) \le \frac{5}{12}$

- $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{12} + P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$
  $P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ (2)

άρα $P(\omega_2) \le \frac{5}{12}$

- $P(\omega_2) \ge 0$, οπότε ισχύει η σχέση (1).

B3. $P'(A) = P(\omega_2) + P(\omega_3) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = P(\omega_2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$

Απ την (2), $P(\omega_2) + P(\omega_4) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(\omega_4) + \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$

- $A - B = \{\omega_4\}$
  $B - A = \{\omega_3\}$
  $(A-B)\bigcup(B-A) = \{\omega_3, \omega_4\}$
  $P\left((A-B)\bigcup(B-A)\right) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

- $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$
  $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$ άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$
  $A' - B' = \{\omega_3\}$

Θέμα Γ

Γ1.

Έστω c το πλάτος της κάθε κλάσης.

Θεωρώ τις κλάσεις [50,50+c), [50+c,50+2c), [50+2c,50+3c), [50+3c,50+4c), επειδή $x_4 = 85$ έχω:

$\frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow$c=10.

Γ2.

$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 \Leftrightarrow$

$74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot f_3 + 85 \cdot 2f_3 \Leftrightarrow$

$74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 245 \cdot f_3$ (1)

Ισχύει
$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1$ (2)

Αφού δ=75 και αφήνει το πολύ το 50 % κάτω από αυτήν τότε $\frac{f_3}{2} + f_4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f_3 + 2f_4 = 1 \Leftrightarrow f_3 + 4f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$

$f_4 = 2f_3 = 0.4$

$(2) \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3 \cdot 0,2 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_1 = 0.4 - f_2$ (3)

$(1) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 74 = 55(0,4 - f_2) + 65 f_2 + 245 \cdot 0,2 \Rightarrow 74 = 22 - 55 f_2 + 65 f_2 + 49 \Rightarrow$
$10 f_2 = 3 \Rightarrow f_2 = 0,3$
$(3) \Rightarrow f_1 = 0,4 - 0,3 = 0,1$

Γ3.

$\nu_1 = f_1 \nu$
$\nu_2 = f_2 \nu$
$\nu_3 = f_3 \nu$

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{x_1 f_1 \nu + x_2 f_2 \nu + x_3 f_3 \nu}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,1 + 0,3 + 0,2} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.

Έχουμε $\bar{x} + 2s = 74$ (1)
$\bar{x} - s = 68$ (2)

(1)-(2)=3s=6 $\Rightarrow$ s=2

(2) $\Rightarrow$ $\bar{x} = 70$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές .

Θέμα Δ

Δ1.

f(x)=xlnx+k, x>0

k>1, ακέραιος

εφ. στο (1,f(1)): y-f(1)=f'(1)(x-1)

y-k=x-1 $\Leftrightarrow$ y=x+k-1 (ε)

- f'(x)=lnx+1

  f'(1)=1

  Η (ε) τέμνει τον x'x στο A(1-κ,0)

  και τον y'y στο B(0,κ-1)

  $$E=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}|1-\kappa|\cdot|\kappa-1|=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2 \Leftrightarrow E<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2 \Leftrightarrow |\kappa-1|<2 \overset{\kappa>1}{\Leftrightarrow} \kappa-1<2$$

  κ<3

  $$\left.\begin{array}{l} 1<\kappa<3 \\ \kappa\in Z \end{array}\right\} \text{άρα } \kappa=2$$

Δ2.

Η εφαπτομένη είναι y=x+1

α) Το νέο δείγμα είναι $y_i = x_i + 1$, i=1,…,50

οπότε, $\bar{y}=\bar{x}+1 \Leftrightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$

β) $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}\Leftrightarrow 30=\dfrac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{50}x_i=1500$

Η νέα μέση τιμή είναι

$$\overline{x_N}=\frac{\left(x_1+\ldots+x_{20}\right)+3\cdot 20+\left(x_{21}+\ldots+x_{35}\right)+\left(x_{36}+\ldots+x_{50}\right)-15\cdot\lambda}{50}$$

$$\overline{x_\omega}=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i+60-15\cdot\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=\frac{1500+60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow 1550=1500-15\lambda\Leftrightarrow 15\lambda=10\Leftrightarrow\lambda=\frac{10}{15}\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$$

Δ3.

f(x)=xlnx+2

f'(x)=lnx+1

- $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7\Leftrightarrow\ln(\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma)=\ln e^7\Leftrightarrow\ln\alpha^\alpha+\ln\beta^\beta+\ln\gamma^\gamma=7\Leftrightarrow a\ln a+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7$

- $f(\alpha)=a\ln a+2$
  $f(\beta)=\beta\ln\beta+2$
  $f(\gamma)=\gamma\ln\gamma+2$
  $f(e)=e+2$

  $f'(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}+1=\ln e^{-1}+1=-1+1=0$

- $f'(x)=\ln x+1$
  $\ln x+1=0\Leftrightarrow$
  $\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}$

		1/e	+∞
f'	−	+	
f	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα	

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln e^{-1}+2=-\frac{1}{e}+2=\frac{2e-1}{e}>0,$$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

$$f'(\frac{1}{e}) = 0 < f(\frac{1}{e}) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Άρα, $R = f(e) - f'(\frac{1}{e}) = e + 2 - 0 = e + 2$

$$\bar{x} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f'(\frac{1}{e}) + f(e)}{5} = \frac{a\ln a + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma + 6 + e + 2 + 0}{5}$$

$$\xrightarrow{(1)} \bar{x} = \frac{7 + 6 + e + 2}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{15 + e}{5}$$

<u>ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ</u>

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ