

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Θέμα Α

A1. Σελ. 28 σχολικού βιβλίου

A2. Σελ. 14 σχολικού βιβλίου

A3. Σελ. 87 σχολικού βιβλίου

A4. Α)Λ Β)Σ Γ)Λ Δ)Λ Ε)Λ

Θέμα Β

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$$A = \{\omega_1, \omega_4\}$$

$$B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

B1.

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + \cancel{x} - \cancel{x}}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} =$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{\cancel{x}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$P(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3}$$

B2.

$$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$$

$$P(A') = P(\omega_2) + P(\omega_3) = P(\omega_2) + \frac{1}{3}$$

- $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(\omega_2) + \frac{1}{3} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 \leq P(\omega_2) \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \leq P(\omega_2) \leq \frac{5}{12}$

- $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{12} + P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$ (2)

$$P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\text{\acute{a}\rho\alpha } P(\omega_2) \leq \frac{5}{12}$$

- $P(\omega_2) \geq 0$, οπότε ισχύει η σχέση (1).

$$B3. P'(A) = P(\omega_2) + P(\omega_3) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = P(\omega_2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Απ την (2), } P(\omega_2) + P(\omega_4) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(\omega_4) + \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$$

- $A - B = \{\omega_4\}$

$$B - A = \{\omega_3\}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$$

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$$

- $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$ \acute{a}\rho\alpha $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

$$A' - B' = \{\omega_3\}$$

Θέμα Γ

Γ1.

Έστω c το πλάτος της κάθε κλάσης.

Θεωρώ τις κλάσεις $[50, 50+c)$, $[50+c, 50+2c)$, $[50+2c, 50+3c)$, $[50+3c, 50+4c)$, επειδή $x_4 = 85$ έχω:

$$\frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow c=10.$$

Γ2.

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 \Leftrightarrow$$

$$74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot f_3 + 85 \cdot 2f_3 \Leftrightarrow$$

$$74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 245 \cdot f_3 \quad (1)$$

Ισχύει

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \quad (2)$$

Αφού $\delta=75$ και αφήνει το πολύ το 50 % κάτω από αυτήν τότε $\frac{f_3}{2} + f_4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f_3 + 2f_4 = 1 \Leftrightarrow f_3 + 4f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$

$$f_4 = 2f_3 = 0,4$$

$$(2) \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3 \cdot 0,2 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_1 = 0,4 - f_2 \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 74 = 55(0,4 - f_2) + 65f_2 + 245 \cdot 0,2 \Rightarrow 74 = 22 - 55f_2 + 65f_2 + 49 \Rightarrow$$

$$10f_2 = 3 \Rightarrow f_2 = 0,3$$

$$(3) \Rightarrow f_1 = 0,4 - 0,3 = 0,1$$

Γ3.

$$v_1 = f_1 v$$

$$v_2 = f_2 v$$

$$v_3 = f_3 v$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{x_1 f_1 v + x_2 f_2 v + x_3 f_3 v}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,1 + 0,3 + 0,2} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.

Έχουμε $\bar{x} + 2s = 74 \quad (1)$

$$\bar{x} - s = 68 \quad (2)$$

$$(1) - (2) = 3s = 6 \Rightarrow s = 2$$

$$(2) \Rightarrow \bar{x} = 70$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές .

Θέμα Δ

Δ1.

$$f(x) = x \ln x + k, \quad x > 0$$

$k > 1$, ακέραιος

εφ. στο $(1, f(1))$: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$y - k = x - 1 \Leftrightarrow y = x + k - 1 \quad (\varepsilon)$$

- $f'(x) = \ln x + 1$

$$f'(1) = 1$$

Η (ε) τέμνει τον x ' x στο $A(1 - \kappa, 0)$

και τον y ' y στο $B(0, \kappa - 1)$

$$E = \frac{1}{2} (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} |1 - \kappa| \cdot |\kappa - 1| = \frac{1}{2} (\kappa - 1)^2 \Leftrightarrow E < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\kappa - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \stackrel{\kappa > 1}{\Leftrightarrow} \kappa - 1 < 2$$

$$\kappa < 3$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 < \kappa < 3 \\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{άρα } \kappa = 2$$

Δ2.

Η εφαπτομένη είναι $y = x + 1$

α) Το νέο δείγμα είναι $y_i = x_i + 1, i = 1, \dots, 50$

$$\text{οπότε, } \bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$$

$$\beta) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} \Leftrightarrow 30 = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i = 1500$$

Η νέα μέση τιμή είναι

$$\bar{x}_N = \frac{(x_1 + \dots + x_{20}) + 3 \cdot 20 + (x_{21} + \dots + x_{35}) + (x_{36} + \dots + x_{50}) - 15 \cdot \lambda}{50}$$

$$\bar{x}_\omega = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15 \cdot \lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{1500 + 60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 1550 = 1500 - 15\lambda \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{15} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3.

$$f(x) = x \ln x + 2$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

- $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7 \Leftrightarrow \ln(\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) = \ln e^7 \Leftrightarrow \ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma = 7 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7$

- $f(\alpha) = \alpha \ln \alpha + 2$
 $f(\beta) = \beta \ln \beta + 2$
 $f(\gamma) = \gamma \ln \gamma + 2$
 $f(e) = e + 2$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} + 1 = \ln e^{-1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

- $f'(x) = \ln x + 1$
 $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

	1/e	+∞
f'	-	+
f	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1} + 2 = -\frac{1}{e} + 2 = \frac{2e-1}{e} > 0,$$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

$$\text{Άρα, } R = f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$$

$$\bar{x} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e)}{5} = \frac{a \ln a + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma + 6 + e + 2 + 0}{5}$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} \bar{x} = \frac{7 + 6 + e + 2}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{15 + e}{5}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ